Originale Abituraufgaben 2020

Hauptprüfung-Mathematik

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Paul Fansi

www.faacademy.de

Punkte

Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=10\cdot x\cdot e^{-x};\quad x\in\mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K_f.

Die erste Ableitung f' von f ist $f'(x)=10\cdot(1-x)\cdot e^{-x};\ x\in\mathbb{R}$ und die zweite Ableitung f'' von f ist $f''(x)=10\cdot(x-2)\cdot e^{-x};\ x\in\mathbb{R}$.

1.1.1 Weisen Sie nach, dass $\left(1\middle|\frac{10}{e}\right)$ der Hochpunkt von K_f ist. 4

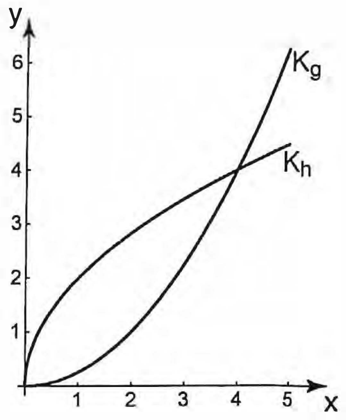
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K_f an.

1.1.2 Zeichnen Sie K_f für $0\le x\le 6$. 3

1.1.3 Zeigen Sie, dass F mit $F(x)=-10\cdot(x+1)\cdot e^{-x};\quad x\in\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. 5

Bestimmen Sie den Wert von a in der Gleichung : $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{a\cdot e-30}{e^2}$.

1.2 Für $x\ge 0$ sind die Funktionen g mit $g(x)=\frac{1}{4}x^2$ und h mit $h(x)=2\sqrt{x}$ gegeben. Die Abbildung zeigt die Schaubilder K_g von g und K_h von h.



1.2.1 Prüfen Sie die folgende Aussage: 4
„Die Gerade durch die beiden Punkte $P(1|h(1))$ und $Q(2|g(2))$ ist sowohl die Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q."

1.2.2 Die y-Achse, K_h und die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y=c$, mit $c>0$, begrenzen eine Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. 4
Bestimmen Sie den Wert von c, sodass dessen Volumen 32π beträgt.

20

Punkte

Anwendungsorientierte Analysis

2 Der Wasserzufluss bzw. der Wasserabfluss eines Staubeckens wird über 24 Stunden hinweg beobachtet und durch die Funktion v mit

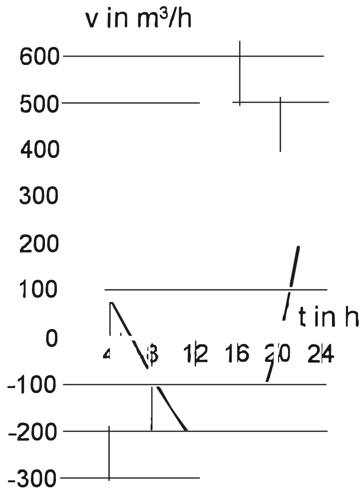
$v(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 36)(t - 20);\quad 0 \le t \le 24,$

modelliert.

Hierbei gibt t die Zeit seit Beginn der Beobachtung $(t = 0)$ in Stunden an. v(t) wird in Kubikmeter pro Stunde $\left(\frac{m^3}{h}\right)$ gemessen.

Bei Wasserzufluss ist v(t) positiv und bei Wasserabfluss ist v(t) negativ.

Die Abbildung zeigt das Schaubild von v.



2.1 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: 3

„Es gibt einen Zeitpunkt, an dem 280 $\frac{m^3}{h}$ abfließen."

Geben Sie den maximalen Wasserzufluss und den dazugehörigen Zeitpunkt an.

2.2 Berechnen Sie den Wert des Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung und wie viele Minuten vergehen, bis v diesen Wert erneut erreicht. 4

2.3 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich noch 1000 m^3 Wasser im Becken. 3

Erläutern Sie, wie man die Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt $t = 0$ ermitteln kann und geben Sie diese Wassermenge näherungsweise an.

10

Punkte

Anwendungsorientierte Analysis

3 Das Training einer Schwimmerin wird mit Videos ausgewertet. Abbildung 1 zeigt modellhaft die Geschwindigkeit v der Schwimmerin in Metern (m) pro Sekunde (s) in Abhängigkeit von der Zeit t in s.
Ein Armzyklus dauert 1,2 s.

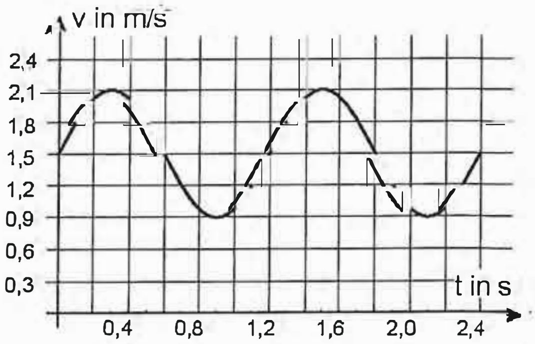


Abbildung 1

3.1 Begründen Sie mit Hilfe von Abbildung 1, dass die Geschwindigkeit v ab dem Beobachtungsbeginn ($t = 0$) durch die Funktionsgleichung 3

$$v(t) = 1{,}5 + 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3} \cdot t\right)$$

beschrieben werden kann.

3.2 Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die gemäß des Modells während eines Armzyklus zurückgelegt wird. 3
Bestimmen Sie damit die Zeit, die die Schwimmerin für 36 m benötigt.

3.3 Zum Zeitpunkt $t = 24$ beginnt die Schwimmerin ihren Endspurt. Dabei erhöht sich ihre Geschwindigkeit pro Sekunde zusätzlich um $0{,}05\ \frac{m}{s}$.
Die Geschwindigkeit der Schwimmerin ist in Abbildung 2 dargestellt und wird ab $t = 24$ durch eine Funktion v_E modelliert.

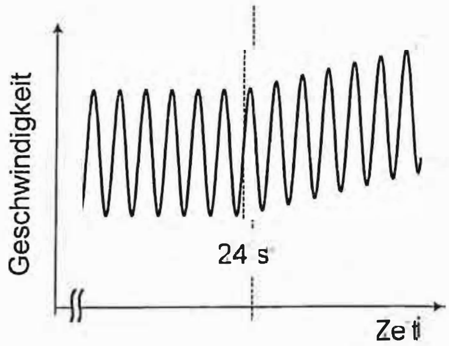


Abbildung 2

3.3.1 Interpretieren Sie den Ansatz $\int_{24}^{24+u} v_E(t)\,dt = 14$ im Sachzusammenhang. 2

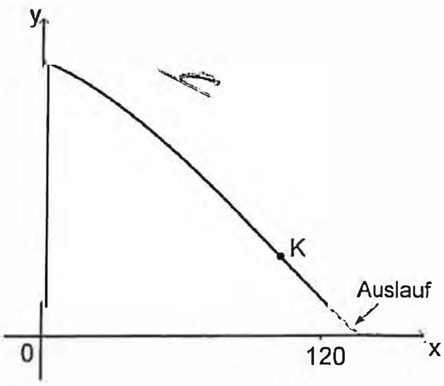
3.3.2 Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion v_E an. 2

10

Punkte

Anwendungsorientierte Analysis

4 Die Abbildung zeigt die Aufsprungbahn einer Skisprungschanze.
Der obere Teil der Aufsprungbahn wird durch f mit
$f(x) = 0{,}000012 \cdot x^3 - 0{,}00378 \cdot x^2 - 0{,}27 \cdot x + 76$
für $0 \le x \le 120$ modelliert.
Der untere Teil der Aufsprungbahn dient als Auslauf. Alle Angaben sind in Meter.



4.1 Die Aufsprungbahn hat im kritischen Punkt K ihr größtes Gefälle. 5

Weisen Sie nach, dass die x-Koordinate von K den Wert 105 besitzt und berechnen Sie den Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt.

4.2 Die Flugbahn eines Skispringers wird durch die Parabel mit der Gleichung 3
$y = -0{,}00132 \cdot x^2 - 0{,}436 \cdot x + 80$
modelliert.

Prüfen Sie, ob die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ tangential in die Aufsprungbahn übergeht.

4.3 Erläutern Sie im Sachkontext, welche Größe durch die Berechnung 2
$$\sqrt{(f(0)-f(40))^2+1600}+\sqrt{(f(40)-f(80))^2+1600}+\sqrt{(f(80)-f(120))^2+1600} \approx 137{,}5$$
näherungsweise bestimmt wird.

10

Punkte

Stochastik

1 Bei einem Festival können Teilnehmer zwischen zwei verschiedenen Veranstaltungen wählen. Erfahrungsgemäß besuchen 36 % aller Teilnehmer die Beachparty, während alle anderen zum Rockkonzert gehen.
Die Tickets für das Festival kann man entweder online oder an der Abendkasse kaufen. Langjährige Erfahrungswerte zeigen, dass die Teilnehmer der Beachparty zu 70 % ihr Ticket online erwerben. Außerdem weiß man, dass insgesamt 26,8 % aller Teilnehmer ihr Ticket an der Abendkasse kaufen.

1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse. 6

E_1: Von 5 zufällig ausgewählten Teilnehmern besuchen alle die Beachparty.

E_2: Von 30 zufällig ausgewählten Teilnehmern gehen mindestens 20 zur Beachparty.

E_3: Von 1000 Teilnehmern des Festivals besuchen mindestens 380, jedoch höchstens 390 Leute die Beachparty.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket online erwirbt. 5

Ein Teilnehmer hat sein Ticket online erworben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dann Teilnehmer der Beachparty ist.

1.3 Für die Beachparty im Sommer 2020 stehen 1500 Tickets zur Verfügung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % sollen alle der am Festival Interessierten, die zur Beachparty gehen möchten, tatsächlich ein Ticket für die Beachparty erhalten. Ein Schüler behauptet, dass somit die Anzahl n aller am Festival Interessierten unter 3980 liegen muss. 4
Überprüfen Sie diese Behauptung und ermitteln Sie den maximalen Wert für n.

15

Punkte

Stochastik

2 Bei einer großen Feier werden ein Hauptgericht mit Fleisch, ein vegetarisches Hauptgericht, sowie anschließend eine Nachspeise angeboten.
Die Planer greifen auf langjährige Erfahrungswerte ihrer Vorgänger zurück, bei denen alle Gäste genau ein Hauptgericht wählen, jedoch nur 85 % der Gäste eine Nachspeise nehmen. 30 % aller Gäste entscheiden sich für das vegetarische Hauptgericht. Von den Gästen, die sich für ein vegetarisches Hauptgericht entschieden haben, nehmen anschließend 75 % auch eine Nachspeise.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Gast ein Hauptgericht mit Fleisch wählt und eine Nachspeise nimmt. 6

Beziehen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Von denjenigen Gästen, die eine Nachspeise nehmen, ist der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als 27 %".

2.2 Eine Planung geht zunächst von 800 Gästen aus. 6
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
- A: Genau 240 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
- B: Höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
- C: Mehr als 220, aber höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.

2.3 Bei einem Stichprobenumfang von 80 Gästen gaben 30 an, dass sie ein vegetarisches Hauptgericht wählen werden. 3
Beurteilen Sie auf der Basis eines 95 % - Vertrauensintervalls, ob die Planer dem oben genannten langjährigen Erfahrungswert vertrauen können.

15

Punkte

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1 Ein Architekt plant ein modernes Museum.
Im Modell hat das Museum eine rechteckige Grundfläche mit den Eckpunkten
$A_1(0\,|\,0\,|\,0)$, $B_1(10\,|\,0\,|\,0)$, $C_1(10\,|\,5\,|\,0)$, $D_1(0\,|\,5\,|\,0)$
und ein Dach, das aus den vier Eckpunkten
$A_2(0\,|\,0\,|\,2)$, $B_2(10\,|\,0\,|\,2)$, $C_2(10\,|\,6\,|\,2)$, $D_2(0\,|\,5{,}5\,|\,2{,}5)$
gebildet wird. Die von der Grundfläche zum Dach verlaufenden Kanten des Modells verbinden Punkte gleichen Buchstabens, z.B. ist A_1 mit A_2 verbunden.
Eine Längeneinheit im Modell entspricht 10 Meter (m).

1.1 Zeichnen Sie das Modell in ein geeignetes Koordinatensystem. 4

1.2 Die Vorderseite des Modells (d.h. der Schnitt mit der Ebene $x_1 = 10$) bildet ein Trapez. Diese Fläche soll zu 80 % aus einem Spezialglas bestehen, das 400 Euro pro m^2 kostet. 3

Berechnen Sie die hierfür zu kalkulierenden Kosten.

1.3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ teilt das Dach in zwei dreieckige Flächen. 4
Bestimmen Sie den Winkel den diese beiden Flächen im Innern des Modells bilden.

1.4 Im Punkt C_2 soll ein Laser installiert werden, der den Laserstrahl in Richtung $\overline{C_1C_2}$ geradlinig in den Himmel schickt. Entsprechend soll im Punkt D_2 ein weiterer Laser mit Laserstrahl in Richtung $\overline{D_1D_2}$ installiert werden.

1.4.1 Geben Sie für jeden der beiden Laserstrahlen eine Gleichung der entsprechenden Geraden an. 2

1.4.2 Bestimmen Sie die Höhe über der Grundfläche, in der diese beiden Laserstrahlen genau 212,5 m voneinander entfernt sind. 2

15