Baden-Württemberg

Berufskolleg

www.faacademy.de

Originale Fachhochschulreife 2021

Hauptprüfung-Mathematik

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Paul Fansi

www.faacademy.de

Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$, $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild heißt K_f.

2.1 Zeigen Sie, dass f bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 3$ Nullstellen hat.
Untersuchen Sie K_f auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_f für $-1{,}25 \leq x \leq 4$. 12

2.2 Prüfen Sie, ob die y-Achse den Inhalt der Fläche zwischen K_f und der x-Achse im Verhältnis 1:2 teilt. 5

2.3 Von einem zur y-Achse symmetrischen Schaubild einer ganzrationalen Funktion vierten Grades kennt man einen Hochpunkt $T(2\,|\,9)$ und eine Nullstelle bei $x = -1$.
Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dessen Hilfe man einen passenden Funktionsterm bestimmen könnte. 4

Eine blaue Flüssigkeit wird in einem Labor bei einem Versuch erhitzt. Die Temperatur T der Flüssigkeit in Grad Celsius (°C) wird durch die Funktion $T(t) = 105 - 83\,e^{-0{,}15t}$, $t \geq 0$ beschrieben, dabei ist t die Zeit in Minuten. Diese Temperatur wird von einem Thermometer fortlaufend überwacht.

2.4 Geben Sie den Messbereich an, den das Thermometer für diesen Versuch mindestens erfassen können muss. 2

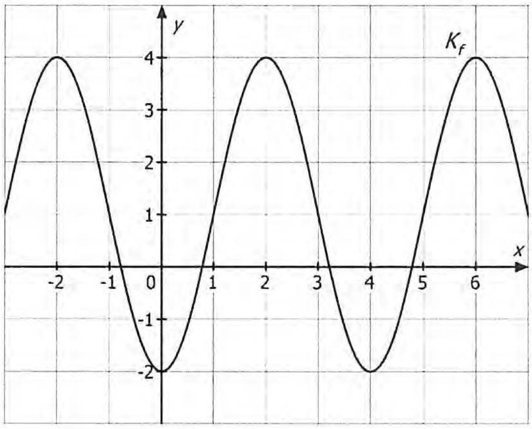
2.5 Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 5$ kleiner ist als die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur in den ersten fünf Minuten. 4

2.6 Bei einer Temperatur von 92°C schlägt die Farbe der Flüssigkeit in grün um. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dies passiert. 3

30

Punkte

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + d$, $x \in \mathbb{R}$.



3.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und d. 4

3.2 Das Schaubild K_f wird zuerst mit Faktor 1,5 in x-Richtung gestreckt und dann um 1 Längeneinheit nach oben verschoben. Das neue Schaubild heißt K_g.
Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_g im Intervall $[0;4]$ an.
Bestimmen Sie die Periode von g nach der Streckung in x-Richtung. 4

Die Temperatur (in °C) einer Felswand wird beschrieben durch die Funktion T mit $T(t) = -7\cos(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 14$, $t \in [0;24]$.
Dabei ist t die Zeit (in Stunden) und $t = 0$ entspricht der Zeit 05:00 Uhr.

3.3 Bestimmen Sie die Uhrzeiten, zu denen der Fels am wärmsten bzw. am kältesten ist und ermitteln Sie die zugehörigen Temperaturen.
Bei welchen Temperaturen ändert sich die Temperatur am schnellsten? 6

3.4 In welchem Zeitraum liegt die Temperatur oberhalb von 17,5°C? 2

Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = \frac{1}{2}x + 3 - e^{0,5x}, x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_h.

3.5 Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_h an.
Untersuchen Sie K_h auf Extrempunkte.
Zeichnen Sie K_h für $-8 \le x \le 4$. 10

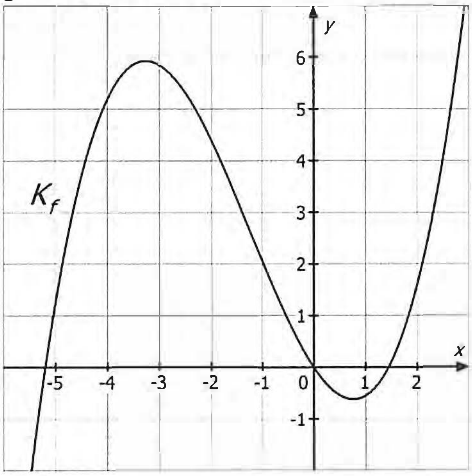
3.6 Zeigen Sie, dass die Steigung von K_h in allen Punkten kleiner als 0,5 ist. 4

30

Punkte

Name: ______________________________________
Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x)=\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x,\ x\in\mathbb{R}$
und ihr Schaubild K_f.



4.1 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(0\,|\,f(0))$.
Im Punkt B auf K_f besitzt die Tangente dieselbe Steigung wie in P.
Bestimmen Sie die Koordinaten von B. 7

4.2 Die Gerade $x=u$ schneidet K_f für $-5\le u\le 0$ im Punkt Q und die x-Achse im Punkt R. Der Koordinatenursprung O bildet mit den Punkten Q und R ein Dreieck.
Zeichnen Sie in das obige Schaubild das Dreieck OQP für $u=-4$ ein.
Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. 8

4.3 Begründen Sie, dass das Schaubild jeder Stammfunktion von f an der Stelle $x=0$ einen Hochpunkt hat.
Geben Sie die Stammfunktion an, deren Schaubild den Hochpunkt in $H(0\,|\,-3)$ hat. 4

Die Funktion g ist für $-2\le x\le 6$ gegeben durch $g(x)=-1{,}5\sin(x)-2$.
Ihr Schaubild ist K_g.

4.4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_g.
Zeichnen Sie K_g. 7

4.5 Die Parabel $y=-x^2+\pi x-2$ umschließt mit K_g im Intervall $[0;\pi]$ eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 4

30